概率论第 6 次习题课讲义

宗语轩

2022 秋, USTC

1 作业讲评

补充题 1 求特征函数 $\phi(t)=\cos^2 t$ 的分布函数.

解. 反转公式计算, 或直接 “猜” 出来: 注意到

$$\phi(t)=\cos^2 t=\frac{1+\cos t}{2}=\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t}}{4},$$

可得

$$\mathbb{P}(X=-2)=\mathbb{P}(X=2)=\frac{1}{4},\quad \mathbb{P}(X=0)=\frac{1}{2}\implies F(x)=\begin{cases}0, & x<-2,\\ \frac{1}{4}, & -2\leqslant x<0,\\ \frac{3}{4}, & 0\leqslant x<-2,\\ 1, & x\geqslant 2.\end{cases}$$

□

注. 不能直接写成 $f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\phi(t)\mathrm{d}t$, 随机变量未必是连续型.

补充题 2 若 $Z\sim N_{\mathbb{C}}(0,1)$, 则有

$$\mathbb{E}[Z^k\bar{Z}^l]=\begin{cases}k!, & k=l,\\ 0, & k\neq l.\end{cases}$$

解. 利用 $f(z)=\frac{1}{\pi}\mathrm{e}^{-|z|^2}$, 有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z^k\bar{Z}^l]&=\int_{\mathbb{C}}\frac{1}{\pi}\mathrm{e}^{-|z|^2}z^k\bar{z}^l\mathrm{d}z\xlongequal{r=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\pi}\mathrm{e}^{-r^2}(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^k(r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})^l r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\pi}r^{k+l+1}\mathrm{e}^{i(k-l)\theta}\mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r\\&=\begin{cases}2\int_0^{+\infty}r^{2k+1}\mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r=\Gamma(k+1)=k!, & k=l,\\ 0, & k\neq l.\end{cases}\end{aligned}$$

□

[0] 个人主页: http://home.ustc.edu.cn/~zyx240014/.
发现错误欢迎联系: zyx240014@mail.ustc.edu.cn.

延伸: 设 $Z_1, Z_2 \sim N_{\mathbb{C}}(0,1)$ 且独立,

(1) 求 $\dfrac{Z_1}{Z_2}$ 的密度函数.

(2) 对正整数 m, 求期望 $\mathbb{E}[|Z_1 - Z_2|^{2m}]$.

解. (1) 设 $Z_i = R_i \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_i}, R_i \geqslant 0, \theta_i \in [0, 2\pi), i = 1, 2, R = \dfrac{R_1}{R_2}, \Theta = \theta_1 - \theta_2$. 利用

$$f_R(r) = 2r\mathrm{e}^{-r^2}, \quad f_\theta(y) = \frac{1}{2\pi} I_{[0,2\pi)}(y),$$

有

$$f_\Theta(\theta) = \int_{\infty}^{+\infty} f_{\theta_1}(\theta - y) f_{-\theta_2}(y)\mathrm{d}y = \begin{cases} \dfrac{\theta + 2\pi}{(2\pi)^2}, & -2\pi \leqslant \theta < 0, \\ \dfrac{2\pi - \theta}{(2\pi)^2}, & 0 \leqslant \theta < 2\pi. \end{cases}$$

为统一 $\Theta \in [0, 2\pi)$, 有

$$f_\Theta(\theta) = \frac{1}{2\pi} I_{[0,2\pi)}(\theta).$$

再换元 $\begin{cases} X = \dfrac{R_1}{R_2}, \\ Y = R_2. \end{cases}$ 则有 $\dfrac{\partial(R_1, R_2)}{\partial(X, Y)} = y$, 故

$$f_{X,Y}(x, y) = f_{R_1,R_2}(r_1, r_2)\frac{\partial(R_1, R_2)}{\partial(X, Y)} = 4xy^3\mathrm{e}^{-y^2(1+x^2)},\ x, y \geqslant 0.$$

因此

$$f_X(x) = \int_0^{+\infty} f_{X,Y}(x, y)\mathrm{d}y = \frac{2x}{(1 + x^2)^2} \implies f_{R,\Theta}(r, \theta) = \frac{1}{2\pi}\frac{2r}{(1 + r^2)^2} \implies f_{\frac{Z_1}{Z_2}}(z) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{(1 + |z|^2)^2}.$$

(2) 利用上面作业题结论, 有

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|Z_1 - Z_2|^{2m}] &= \mathbb{E}[(Z_1 - Z_2)^m(\bar{Z}_1 - \bar{Z}_2)^m] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=0}^m \binom{m}{i}(-1)^{m-i} Z_1^i Z_2^{m-i}\right)\left(\sum_{j=0}^m \binom{m}{j}(-1)^{m-j} \bar{Z_1}^j \bar{Z_2}^{m-j}\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{i,j=0}^m \binom{m}{i}\binom{m}{j}(-1)^{i+j} Z_1^i \bar{Z_1}^j Z_2^{m-i}\bar{Z_2}^{m-j}\right] \\
&= \sum_{i,j=0}^m \binom{m}{i}\binom{m}{j}(-1)^{i+j}\mathbb{E}\left[Z_1^i \bar{Z_1}^j\right]\mathbb{E}\left[Z_2^{m-i}\bar{Z_2}^{m-j}\right] \\
&= \sum_{i=0}^m \binom{m}{i}^2 i!(m-i)! \\
&= 2^m \cdot m!
\end{aligned}$$

□

4.13.37 $\phi(x)$ 是标准正态分布的密度函数, 定义函数 $H_n, n \geqslant 0$, $H_0 = 1$, $(-1)^n H_n \phi = \phi^{(n)}$, 证明:

(1) $n \geqslant 0$, $H_n(x)$ 是主项为 x^n 的 n 次多项式, 且满足正交关系:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x)H_n(x)\phi(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} m!, & m = n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$$

(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{t^n}{n!} = \exp\left(tx - \frac{t^2}{2}\right)$.

解. (1) 利用 $\phi'(x) = -x\phi(x)$, 有

$$\phi^{(n+1)}(x) = (-1)^n H_n'(x)\phi(x) + (-1)^n H_n(-x\phi(x)) = (-1)^{n+1}(xH_n(x) - H_n'(x))\phi(x).$$

因此

$$H_{n+1}(x) = xH_n(x) - H_n'(x).$$

当 $m \leqslant n$ 时, 有

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x)H_n(x)\phi(x)\mathrm{d}x &= (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x)\phi^{(n)}(x)\mathrm{d}x \\ &= (-1)^n [H_m(x)\phi^{(n-1)}(x)]\Big|_{-\infty}^{+\infty} + (-1)^{n-1}\int_{-\infty}^{+\infty} H_m'(x)\phi^{(n-1)}(x)\mathrm{d}x \\ &= \cdots = (-1)^{n-m}\int_{-\infty}^{+\infty} H_m^{(m)}(x)\phi^{(n-m)}(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} m!, & m = n \\ 0, & m \neq n. \end{cases} \end{aligned}$$

(2) 注意到

$$\phi(x-t) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{t^n}{n!}\phi^n(x) = \phi(x)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^n}{n!}H_n(x).$$

因此

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^n}{n!}H_n(x) = \frac{\phi(x-t)}{\phi(x)} = \exp\left(xt - \frac{t^2}{2}\right).$$

□

延伸 (Lancaster's theorem)： 题干接上, 设 (X,Y) 服从标准二元正态分布，其相关系数为 $\rho := \rho(X,Y) \in (-1,1)$.

(1) 对任意正整数 m,n, 计算相关系数 $\rho(H_m(X), H_n(Y))$.

(2) 设 $P(x), Q(y)$ 为非常数多项式, 证明:

$$|\rho(P(X),Q(Y))| \leqslant |\rho(X,Y)|.$$

解. (1) 法 1: 不妨 $m \geqslant n$, 利用作业题 **4.13.37(1)** 的结论, 有 $\mathbb{E}[H_n(X)] = 0$, $\mathbb{E}[(H_n(X))^2] = n!$. 而 $Y = \rho X + \sqrt{1-\rho^2}Z$, 其中 X, Z i.i.d $N(0,1)$, 因此有

$$\mathbb{E}[H_m(X)H_n(Y)] = \mathbb{E}[H_m(X)H_n(\rho X + \sqrt{1-\rho^2}Z)] = \int_{\mathbb{R}}\phi(z)(-1)^m\int_{\mathbb{R}}\phi^{(m)}(x)H_n(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}z.$$

类似作业题 **4.13.37(1)**, 有

$$(-1)^m\int_{\mathbb{R}}\phi^{(m)}(x)H_n(y)\mathrm{d}x=(-1)^{m-1}\int_{\mathbb{R}}\phi^{(m-1)}(x)\rho H_n'(y)\mathrm{d}x=\cdots=(-1)^{m-n}\int_{\mathbb{R}}\phi^{(m-n)}(x)\rho^nH_n^{(n)}(y)\mathrm{d}x$$
$$=\begin{cases}\rho^n n!, & m=n,\\ 0, & m\neq n.\end{cases}$$

因此

$$\mathbb{E}[H_m(X)H_n(Y)]=\begin{cases}\rho^n n!, & m=n,\\ 0, & m\neq n.\end{cases}\quad\Longrightarrow\quad\rho(H_m(X),H_n(Y))=\begin{cases}\rho^n, & m=n,\\ 0, & m\neq n.\end{cases}$$

法 2: 利用作业题 **4.13.37(2)** 的结论, 有

$$\sum_{m,n=0}^{+\infty}\frac{s^m}{m!}\frac{t^n}{n!}H_m(X)H_n(Y)=\exp\left(sX+tY-\frac{s^2}{2}-\frac{t^2}{2}\right).$$

而矩母函数

$$M(s,t)=\mathbb{E}[\exp(sX+tY)]=\exp\left(\frac{s^2}{2}+\frac{t^2}{2}+\rho st\right),$$

因此

$$\mathbb{E}\left[\sum_{m,n=0}^{+\infty}\frac{s^m}{m!}\frac{t^n}{n!}H_m(X)H_n(Y)\right]=\exp(\rho st):=G(s,t).$$

由此可得

$$\mathbb{E}[H_m(X)H_n(Y)]=\frac{\partial^{m+n}G}{\partial^m s\partial^n t}\Big|_{s=t=0}=\frac{\partial^{m+n}\exp(\rho st)}{\partial^m s\partial^n t}\Big|_{s=t=0}=\begin{cases}\rho^n n!, & m=n,\\ 0, & m\neq n.\end{cases}$$

(2) 由 **4.13.37(1)** 知, $\{H_n(x)\}$ 构成正交函数列, 且 $H_n(x)$ 主项为 x^n 的 n 次多项式. 故可设 $P(x)=\sum\limits_{m=0}^{\infty}a_mH_m(x)$, $Q(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nH_n(x)$, 不妨 $\mathbb{E}[P(X)]=\mathbb{E}[Q(Y)]=0$, 即 $a_0=b_0=0$. 利用 (1), 有

$$\mathrm{Cov}(P(X),Q(Y))=\mathbb{E}\left(\sum_{m=1}^{\infty}a_mH_m(X),\sum_{n=1}^{\infty}b_nH_n(Y)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n\rho^n n!.$$

而 $\mathrm{Var}(P(X))=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2n!,\mathrm{Var}(Q(y))=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n^2n!$, 利用 Cauchy 不等式, 有

$$|\rho(P(X),Q(Y))|\leqslant|\rho|\frac{\sum_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|n!}{\sqrt{\sum_{m=1}^{\infty}a_m^2m!\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2n!}}\leqslant|\rho|=|\rho(X,Y)|.$$

□

注. 通过我们学过的几个有关正态分布的例子, 从 “矩” 的角度可以看出正态分布有不少 “好” 的性质, 比如其任意奇阶矩为 0 及偶阶矩有限, 其密度函数 $\phi(x)$ 满足 $\phi'(x)=-x\phi(x)$ 可以导出 “好” 的估计 (往往用于极限理论中) 以及构造出与其相关的函数列使其两两正交. 据此在有关正态分布矩的处理中会呈现出不少优美的结果. 后面讲的矩方法中就会涉及到一些关于组合计数的模型.

2 专题选讲

2.1 特征函数

X 的特征函数: $\phi_X(t)=\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX}]$. 多元情形: $\vec{X}=(X_1,\cdots,X_n)$ 特征函数, $\phi_{\vec{X}}(\boldsymbol{t})=\mathbb{E}[e^{i\sum_j t_jX_j}]$.

注. 对于连续型随机变量, 有

$$\phi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}f(x)\mathrm{d}x.$$

此时 $\phi(x)$ 是 $f(x)$ 的 **Fourier 变换**.

定理 2.1. 对特征函数: $\phi(t)=\mathbb{E}[e^{itX}]$

(1) $\phi(0)=1,|\phi(t)|\le 1,\overline{\phi(t)}=\phi(-t)$.

(2) ϕ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续.

(3) ϕ 非负定: $\forall t_1,\cdots,t_n\in\mathbb{R},z_1,\cdots,z_n\in\mathbb{C}$, 有

$$\sum_{j,k=1}^{n}\phi(t_j-t_k)z_j\bar{z}_k\ge 0$$

注. 定理 2.1 完全划分特征函数, Bochner 定理表明反之亦成立.

定理 2.2 (独立性)**.** 我们有

(1) 当 X 与 Y 独立时, $\phi_{X+Y}(t)=\phi_X(t)\phi_Y(t)$.

(2) X 与 Y 独立 $\Leftrightarrow\phi_{X,Y}(s,t)=\phi_X(s)\phi_Y(t)$.

注 1. 对于独立性证明或求有关独立随机变量的和的问题, 用特征函数处理常常能够简化计算.

注 2. (1) 的逆命题并不成立, 我们有如下反例: 设 (X_1,X_2) 的联合密度是

$$f(x,y)=\frac{1+xy(x^2+y^2)}{4},\ |x|,|y|\leqslant 1,$$

则 X_1,X_2 不相互独立, 但有 $\phi_{X_1+X_2}(t)=\phi_{X_1}(t)\phi_{X_2}(t)$.

利用我们已学过的反转公式和唯一性定理, 可以得到

$$X\text{与}Y\text{同分布}\Longleftrightarrow\phi_X(t)=\phi_Y(t).$$

即特征函数与分布函数是相互唯一确定的. 同时对连续型随机变量, 我们有如下定理 (Fourier 逆变换):

定理 2.3. 设 X 是连续型随机变量, 其密度函数为 $f(x)$, 特征函数为 $\phi(x)$, 若 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}|\phi(t)|\mathrm{d}t<+\infty$, 则

$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\phi(t)\mathrm{d}t$$

证明. 利用反转公式 + 控制收敛定理, 具体见 **Grimmett 5.12.20**. □

注. 连续型随机变量的密度函数和特征函数可用 Fourier 变换联系.

定理 2.4 (**Parseval 等式**). 对随机变量 X, Y, 有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_X(t)\mathrm{d}F_Y(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_Y(t)\mathrm{d}F_X(t)\mathrm{d}t.$$

证明. 不妨设 X, Y 独立, 则有

$$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}XY}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}XY}|Y]] = \mathbb{E}[\phi_X(Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_X(t)\mathrm{d}F_Y(t).$$

□

注. Parseval 等式可以把分布函数的性质转化为特征函数的性质, 即 Fourier 变换是自伴变换.

例 2.1. 常见离散型及连续型随机变量的特征函数:

(1) **二项分布**: $B(n,p), \phi(t) = (p\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + q)^n$;

(2) **几何分布**: $G(p), \phi(t) = \dfrac{p\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{1 - q\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}$;

(3) **泊松分布**: $P(\lambda), \phi(t) = \mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-1)}$;

(4) **指数分布**: $\mathrm{Exp}(\lambda), \phi(t) = \dfrac{\lambda}{\lambda - it}$;

(5) **Γ 分布**: $\Gamma(n,\lambda), \phi(t) = \left(\dfrac{\lambda}{\lambda - it}\right)^n$ (利用指数分布特征函数即可导出);

(6) **均匀分布**: $U(a,b), \phi(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}bt} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}at}}{\mathrm{i}t(b-a)}$;

(7) **正态分布**: $N(\mu,\sigma^2), \phi(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$;

注 1. 我们可以通过其特征函数**【先猜】**其分布, 再利用唯一性定理**【后证】**.

注 2. 利用特征函数的方法, 我们可以直接得到二项分布、泊松分布、Γ 分布和正态分布的可加性. 如

$$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2), X, Y \text{ 独立 } \implies X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2).$$

例 2.2. 设 $\phi(t)$ 是特征函数, 证明 $\overline{\phi}(t), \phi^2(t), |\phi(t)|^2, \mathrm{Re}(\phi(t))$ 是特征函数.

解. (1) 设 $\phi(t)$ 是 X 的特征函数, 则有

$$\overline{\phi}(t) = \overline{\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX}]} = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tX}] = \phi_{-X}(t).$$

(2)(3) 设 $\phi(t)$ 是 X_1, X_2 的特征函数, 且 X_1, X_2 相互独立, 则有

$$\phi_{X_1+X_2}(t) = \phi_{X_1}(t)\phi_{X_2}(t) = \phi^2(t), \quad \phi_{X_1-X_2}(t) = \phi_{X_1}(t)\phi_{-X_2}(t) = \phi(t)\overline{\phi}(t) = \phi^2(t).$$

(4) 设 $\phi(t)$ 是 X 的特征函数, Z 满足 $\mathbb{P}(Z = X) = \mathbb{P}(Z = -X) = \dfrac{1}{2}$, 则有

$$\phi_Z(t) = \frac{1}{2}(\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX}] + \mathbb{E}[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tX}]) = \frac{1}{2}(\phi(t) + \overline{\phi}(t)) = \mathrm{Re}(\phi(t)).$$

□

注. $X \overset{d}{=} -X \iff \phi(t)$ 是实值函数.

习题: 举例说明 $|\phi(t)|$ 不一定是特征函数.(见 **Grimmett 5.8.1**)

2.2 多元正态分布

定义 2.1. $\vec{X}=(X_1,\cdots,X_n)$ 服从 n 维正态分布, 若其密度

$$f(\vec{x})=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n\,|\Sigma|}}\exp\left[-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{\mu})\Sigma^{-1}(\vec{x}-\vec{\mu})'\right]$$

这里 $\mu\in\mathbb{R}^n,\Sigma=(\sigma_{ij})_{i,j=1}^n$ 为正定矩阵, 记 $\vec{X}\sim N(\mu,\Sigma)$

通过课堂上已证明的定理得到一些 **Facts**:

(1) 多元正态分布可以通过均值向量和协方差矩阵唯一确定;

(2) 多元正态分布做任何线性变换后仍是多元正态分布.

(3) 随机向量服从多维正态分布，那么这个随机向量的某一部分所满足的多维正态分布可以直接由均值向量和协方差矩阵中的对应部分决定 (打洞);

(4) 多元正态分布独立性与不相关性等价;

推论 2.1. 设 $\vec{X}$ 服从 n 维正态分布 $N(\mu,\Sigma)$, 则存在 n 维正交矩阵 A, 使得 $\vec{Y}=A\vec{X}$ 的各个分量相互独立.

提示. 对任意 n 维正定矩阵 Σ, 存在 n 维正交矩阵 A, 满足 $A\Sigma A^T=I_n$.

推论 2.2. 设 $\vec{X}$ 服从 n 维正态分布 $N(\mu,\Sigma)$, 且 $\vec{X}$ 的各个分量独立同方差, 则对任意 n 维正交矩阵 A,$\vec{Y}=A\vec{X}$ 的各个分量独立同方差.

提示. $\Sigma=\sigma^2 I_n, A\Sigma A^T=\sigma^2 I_n$.

定理 2.5. $\vec{X}\sim N(\mu,\Sigma)$, 则 $Y=\vec{X}\cdot\vec{t}^T$

$$\phi(\vec{t})=\mathbb{E}\left[e^{i\vec{x}\cdot\vec{t}^T}\right]=\mathbb{E}[e^{isY}]\bigg|_{s=1}$$

$Y\sim N(\vec{\mu}\cdot\vec{t}^T,\vec{t}\Sigma\vec{t}^T)$, 当 $\vec{t}\neq 0$ 时

$$\phi(\vec{t})=e^{i\vec{\mu}\cdot\vec{t}^Ts-\frac{1}{2}\vec{t}\Sigma\vec{t}^Ts^2}\bigg|_{s=1}=e^{i\vec{\mu}\cdot\vec{t}'-\frac{1}{2}\vec{t}\Sigma\vec{t}^T}$$

由此我们得到

定理 2.6. $\vec{X}$ 服从 n 维正态分布 $N(\mu,\Sigma)$ 当且仅当对任意 n 维实向量 $\vec{t}$, $\vec{Y}=\vec{t}^T\vec{X}$ 均服从一维正态分布 $N(\vec{t}^T\mu,\vec{t}^T\Sigma\vec{t}\,)$.

注 1. 只满足 n 维随机向量 $\vec{X}$ 的各分量均服从一维正态分布不能推出 $\vec{X}$ 服从 n 维正态分布, 反例如下:

设 X,Y 独立且服从 $N(0,1)$, 令

$$Z=\begin{cases}|Y|, & X\geqslant 0,\\ -|Y|, & X<0.\end{cases}$$

则 $Z\sim N(0,1)$, 但 (Y,Z) 不服从二维正态分布 (可计算出 $\mathbb{P}(Y+Z=0)=\dfrac{1}{2}$, 因此 $Y+Z$ 不服从一维正态分布, 再由**定理 2.6** 即得).

注 2. 我们知道, 多元正态分布独立性与不相关性等价. 但对于多个服从一维正态分布的随机变量, 该等价性不再成立. 例如上面**注 1** 中的随机变量 X, Y, $\mathrm{Cov}(Y, Z) = 0$ 即不相关, 但 Y, Z 不独立.

我们亦可用特征函数的方法来验证课堂上多元正态分布中已讲过的定理及命题, 这里不再赘述.

例 2.3. $\vec{X} \sim N(\vec{\mu}, \Sigma), \vec{X}^T = (\vec{X}^{(1)}, \vec{X}^{(2)}), \vec{\mu}^T = (\vec{\mu}^{(1)}, \vec{\mu}^{(2)})$ $\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}$, 求 $\vec{X}^{(2)}|\vec{X}^{(1)}$ 的条件分布及 $\mathbb{E}[\vec{X}^{(2)}|\vec{X}^{(1)}]$, $Var[\vec{X}^{(2)}|\vec{X}^{(1)}]$.

证明. 打洞. 利用

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} I_{n_1} & O \\ -\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1} & I_{n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{n_1} & -\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12} \\ O & I_{n_2} \end{pmatrix} \\
=& \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & O \\ O & \Sigma_{22} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

我们构造

$$\vec{Y} = \begin{pmatrix} \vec{Y}^{(1)} \\ \vec{Y}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{n_1} & O \\ -\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1} & I_{n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{X}^{(1)} \\ \vec{X}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{X}^{(1)} \\ -\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\vec{X}^{(1)} + \vec{X}^{(2)} \end{pmatrix},$$

则有

$$\vec{Y} \sim N\left(\begin{pmatrix} \vec{\mu}^{(1)} \\ -\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\vec{\mu}^{(1)} + \vec{\mu}^{(2)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & O \\ O & \Sigma_{22} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12} \end{pmatrix} \right).$$

因此 $\vec{Y}^{(1)}$ 与 $\vec{Y}^{(2)}$ 独立,

$$\vec{Y}^{(2)}|\vec{Y}^{(1)} \sim N(-\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\vec{\mu}^{(1)} + \vec{\mu}^{(2)}, \Sigma_{22} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}).$$

而 $\vec{X}^{(1)} = \vec{Y}^{(1)}$, 所以

$$\vec{X}^{(2)}|\vec{X}^{(1)} \sim N(\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}(\vec{X}^{(1)} - \vec{\mu}^{(1)}) + \vec{\mu}^{(2)}, \Sigma_{22} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}),$$

因此 $\mathbb{E}[\vec{X}^{(2)}|\vec{X}^{(1)}] = \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}(\vec{X}^{(1)} - \vec{\mu}^{(1)}) + \vec{\mu}^{(2)}$, $Var[\vec{X}^{(2)}|\vec{X}^{(1)}] = \Sigma_{22} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}$. □

2.3 矩方法

$$\gamma_k = \int_{\mathbb{R}} x^k \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \mathrm{d}x, \ \gamma_{2m-1} = 0, \ \gamma_{2m} = (2m-1)!!.$$

组合诠释: 将 $1, 2, \cdots, 2m$ 配成 m 对, 共有 $(2m-1)!!$ 种.

定理 2.7. $\{X_k\}$ 相互独立, 且满足

(1) $\mathbb{E}[X_k] = 0, Var(X_k) = 1, \forall k$

(2) (一致有界高阶矩) $\forall m \geq 3$, $\mathrm{C}_m = \sup_k \mathbb{E}[|X_k|^m] < \infty$

则对 $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ 有

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)^k\right] \to \gamma_k, n \to \infty$$

进而,

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{D} N(0,1)$$

证明.

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)^k\right] = n^{-\frac{k}{2}} \sum_{1 \le i_1, \cdots, i_k \le n} \mathbb{E}[X_{i_1} X_{i_2} \cdots X_{i_k}]$$

(1) $k = 0, 1$ 显然

(2) $k = 2$

$$\text{LHS} = \frac{1}{n} \sum_{i_1} \mathbb{E}[X_{i_1}^2] + \frac{1}{n} \sum_{i_1 \neq i_2} \mathbb{E}[X_{i_1} X_{i_2}] = 1$$

(3) $k = 3$

$$\begin{aligned} \text{LHS} = n^{-\frac{3}{2}} \sum_{i_1} \mathbb{E}[X_{i_1}^3] + n^{-\frac{3}{2}} \sum_{i_1 \neq i_2} 3\mathbb{E}[X_{i_1}^2 X_{i_2}] \\ + n^{-\frac{3}{2}} \sum_{i_1 \neq i_2 \neq i_3} \mathbb{E}[X_{i_1} X_{i_2} X_{i_3}] = O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right) \to 0 \end{aligned}$$

(4) $k = 4$

$$\begin{aligned} \text{LHS} = & \frac{1}{n^2} \sum_{i_1} \mathbb{E}[X_{i_1}^4] + \frac{1}{n^2} \sum_{i_1 \neq i_2} 4\mathbb{E}[X_{i_1}^3 X_{i_2}] + \frac{1}{n^2} \sum_{i_1 \neq i_2} 3\mathbb{E}[X_{i_1}^2 X_{i_2}^2] \\ & + \frac{1}{n^2} \sum_{i_1 \neq i_2 \neq i_3} 6\mathbb{E}[X_{i_1}^2 X_{i_2} X_{i_3}] + \frac{1}{n^2} \sum_{i_1 \neq i_2 \neq i_3 \neq i_4} \mathbb{E}[X_{i_1} X_{i_2} X_{i_3} X_{i_4}] \\ & = O\left(\frac{1}{n}\right) + 0 + \frac{1}{n^2} \cdot 3n(n-1) + 0 + 0 \to 3 \end{aligned}$$

(5) 一般情形, LHS 中非零项 $\mathbb{E}[X_{i_1} \cdots X_{i_k}]$ 必可写为形如 $\mathbb{E}[X_{i_1}^{a_1} \cdots X_{i_m}^{a_m}], i_1 \neq \cdots \neq i_m$, 且 $a_1, \cdots, a_m \geq 2$. 因 $a_1 + \cdots + a_m = k$, 则 $m \le \left[\frac{k}{2}\right]$, 表明 k 为奇数时,

$$\text{LHS} = n^{-\frac{k}{2}} O(n^m) \to 0.$$

当 k 为偶数时, 主项必在 $m = \frac{k}{2}$ 时取到, 这时 $a_1 = a_2 = \cdots = a_m = 2$, 从 $i_1, i_2, \cdots, i_{2m-1}, i_{2m}$ 两两配对, 配对总数是 $\gamma_k = (k-1)!!$. 对每一种给定的配对方式, 对应极限

$$n^{-\frac{k}{2}} \sum_{\substack{i_1, \cdots, i_k \\ \text{一种配对}}} 1 = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{n^m} \to 1.$$

即证. □

详细分类: $\{1,2,\cdots,k\}$ 划分为 m 组, 每组至少 2 个数字, 记 $\Gamma_k^{(m)}$ 为所有划分方式, 每种方式形如 $V=\{V_1,V_2,\cdots,V_m\}$, 这里 $V_i\cap V_j=\varnothing(\forall i\neq j)$, $\bigcup_j V_j=\{1,\cdots,k\}$, $\#V_j\geq 2$. 可定义等价类: $\vec{i}=(i_1,i_2,\cdots,i_k)\in V$, 若

$$i_p=i_q\Leftrightarrow p,q\in V_j$$

定理 2.7 中依分布收敛可由矩收敛定理证出.

定理 2.8 (矩收敛定理)**.** 假设

(1) $\forall k\in\mathbb{N},\gamma_{k,n}=\int x^k\mathrm{d}F_n$ 存在

(2) $\forall k,\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_{k,n}=\gamma_k$

(3) $\gamma_k=\int x^k\mathrm{d}F$, 且满足 Carleman 条件

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\gamma_{2k})^{-\frac{1}{2k}}=\infty$$

则 $F_n\xrightarrow{w}F$.

注. 自行验证标准正态分布的 k 阶矩 γ_k 满足 Carleman 条件, 从而**定理 2.7** 中

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}}\xrightarrow{D}N(0,1).$$

成立

定理 2.9 (**Wick 公式**)**.** $\mathbb{E}[X^{2m}]=\sum\limits_{\sigma\in P(2m)}\mathbb{E}[X^2]\cdots\mathbb{E}[X^2]$

假设 $(X_1,\cdots,X_{2n})\sim N(0,\Sigma),\Sigma\geq 0$(非负定), 则

$$\mathbb{E}[X_1X_2\cdots X_{2n}]=\sum_{\sigma\in P(2m)}\prod_{i,j\in\sigma}\mathbb{E}[X_iX_j].$$

证明. 令 $Y=\sum\limits_{j=1}^{2n}\lambda_jX_j$, 则 $Y\sim N(0,\sigma^2)$

$$\sigma^2=\sum_{i,j}\lambda_i\lambda_j\mathbb{E}[X_iX_j]$$

令 $g(\lambda)=\mathbb{E}[e^Y]$, 则

$$\mathrm{LHS}=\left(\frac{\partial^{2n}}{\partial\lambda_1\cdots\partial\lambda_{2n}}g(\lambda)\right)\bigg|_{\lambda=0}$$

另外

$$g(\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sigma^{2k}(2k-1)!!}{(2k)!}$$

只须看 $k=n$ 时, LHS $=\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!}$

$$\frac{\partial^{2n}}{\partial\lambda_1\cdots\partial\lambda_{2n}}\left(\sum_{i,j}\lambda_i\lambda_j\mathbb{E}[X_iX_j]\right)^n=\sum_{\sigma\in P(2m)}\prod_{i,j\in\sigma}\mathbb{E}[X_iX_j]$$

$X\sim N(0,1),\mathbb{E}[X^{2n}]=(2n-1)!!$ □

Wick 乘积公式可以参考

$$\text{https://en.wikipedia.org/wiki/Isserlis\%27\_theorem}$$

证明可在 http://www.math.utah.edu/ davar/math7880/F18/GaussianAnalysis.pdf 当中的一节里面找到.

3 补充习题

1 Grimmett 5.7.6, 5.7.9, 5.8.6, 5.9.4, 5.12.14, 5.12.23, 5.12.26(a)-(d), 5.12.27(b)-(d), 5.12.28 (其中部分题与精选题重合)

2 设 X 和 Y 为独立同分布的随机变量, 且 $Var(X)=1$. 证明:

$$\forall a,b\in\mathbb{R},aX+bY\overset{D}{=\!=}\sqrt{a^2+b^2}X\iff X\sim N(0,1).$$

提示. $\Longleftarrow$: 特征函数直接验证; $\Longrightarrow$: 设 X 的特征函数是 $\phi(t)$, 则有

$$\phi(at)\phi(bt)=\phi(\sqrt{a^2+b^2}t).$$

因为 X 二阶矩存在, 故 $\phi(t)=1+\mathrm{i}t\mathbb{E}[X]-\dfrac{t^2}{2}+o(t^2)$, 联立可推得 $\mathbb{E}[X]=0$, 且三阶矩为零, 四阶矩存在. 进一步有

$$\phi(t)=1-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{4!}\mathbb{E}[X^4]+o(t^4).$$

联立再一直重复上述操作即可.